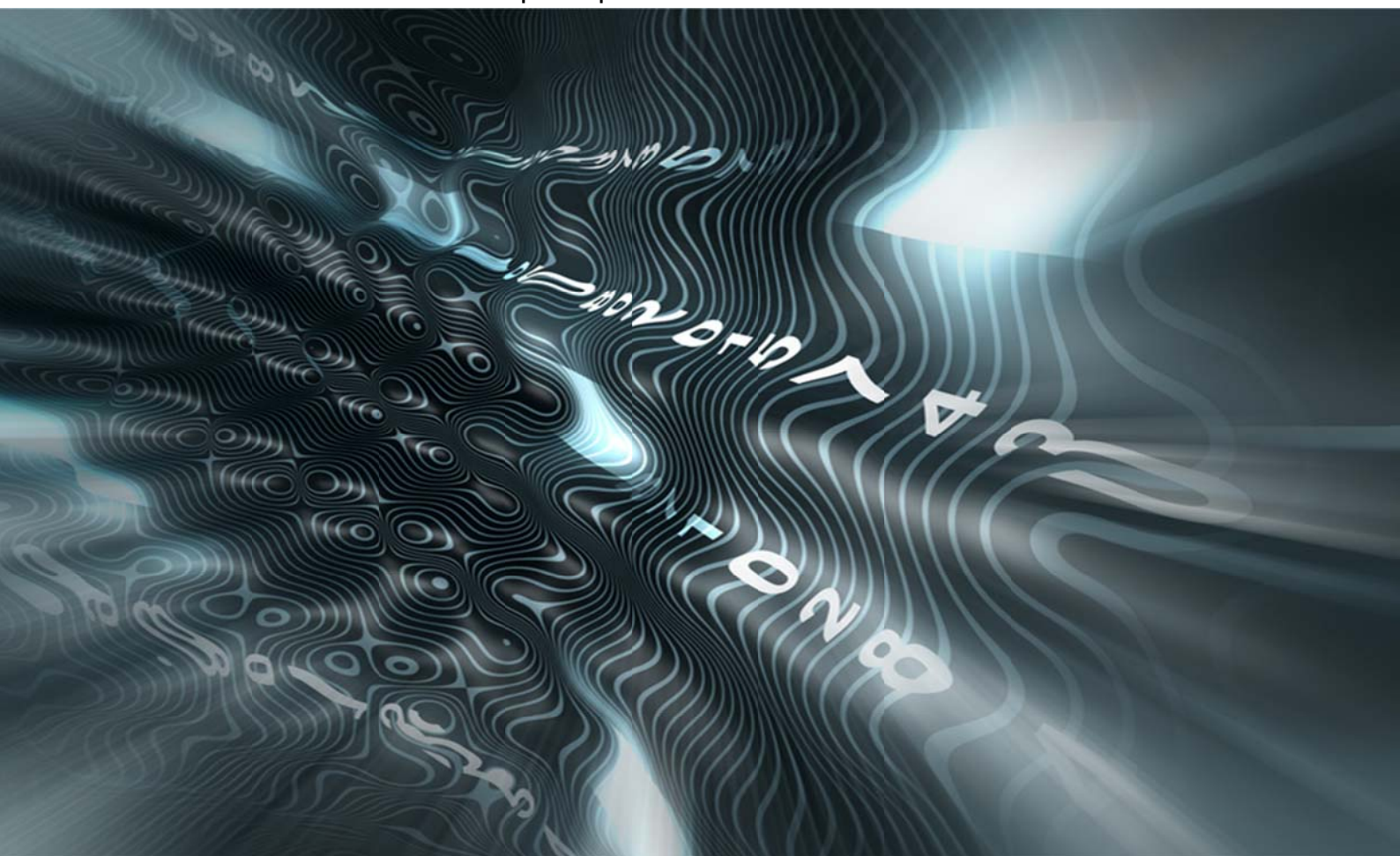


White Paper

Logique floue et systèmes d'inférence floue

Introduction et propriétés



Auteur : Prof. Zyed ZALILA

Première publication : 12/2006

Révision : v2.4 – 12/2013

Avertissement

L'intégralité du présent document est protégée par les droits d'auteur. Les droits de reproduction sont réservés.

Toute citation de quelque partie du document devra obligatoirement comporter la référence suivante :

Zalila, Z. (2006-2013) *Logique floue et systèmes d'inférence floue : Introduction et propriétés*, White Paper, v2.4, **intellitech**, Compiègne, France, décembre 2013, 13 p, <http://xtractis.ai/fr/approche-mathematique-algorithmique-unique/>

Sommaire

1. THÉORIE DU FLOU, LOGIQUE FLOUE	4
2. MODÉLISATION FLOUE	8
3. IDÉES CLE SUR LA THÉORIE DU FLOU [ZALILA, 2003]	12
4. RÉFÉRENCES	13

1. THÉORIE DU FLOU, LOGIQUE FLOUE

Les mathématiques du flou, de plus en plus désignées sous le terme générique de *théorie du flou*, regroupent plusieurs théories qui sont des généralisations ou des extensions de leurs homologues classiques : la théorie des ensembles flous étend celle des ensembles, la logique floue étend la logique binaire, la théorie des quantités floues étend celle des nombres et intervalles, la théorie des possibilités étend celle des probabilités, plus généralement la théorie des mesures floues étend celle de la mesure. Elles ont toutes pour objectif de proposer des concepts, des techniques et des méthodes formellement rigoureuses pour recueillir, représenter et traiter des connaissances et des données floues c'est-à-dire contenant de l'imprécision, de l'incertitude ou de la subjectivité ; ces trois facettes principales du flou étant souvent coexistantes. D'autres synonymes, tels que connaissance mal spécifiée, mal décrite, imparfaite, vague, qualitative, linguistique, partielle, incomplète, approximative ou approchée, recouvrent cette même acception du flou.

En rejetant l'axiome de binarité, posé par Aristote il y a plus de 2300 ans, de telles mathématiques deviennent plus utiles et applicables car plus en adéquation avec le monde réel. Les mathématiques du flou offrent aussi la possibilité de sélectionner et d'appliquer les opérateurs adéquats en fonction du problème à résoudre et de la variabilité de l'agent décideur (comportements optimiste, pessimiste, de compromis, sensibilité physiologique...).

La logique floue apparaît comme une logique graduelle qui se veut être très proche de notre perception nuancée du monde, tandis que la mesure de possibilité remplacera avec justesse la mesure de probabilité lorsque les informations disponibles sont en faible nombre et/ou de faible qualité ; ceci est notamment le cas dans les panels d'évaluation sensorielle où un petit nombre de sujets joue le rôle de capteurs (le plus souvent imprécis). Formellement, la théorie du flou définit une interface entre le qualitatif/symbolique et le quantitatif/numérique. Pratiquement, elle offre une approche élégante à la résolution de problèmes multidimensionnels et complexes, caractérisés par une forte interactivité des parties, faisant intervenir l'Homme à la fois comme capteur et comme décideur/actionneur.

ENSEMBLES FLOUS, PARTITION FLOUE, RÈGLE FLOUE

La genèse de la théorie du flou prend ses racines dans le développement des logiques multivaluées¹ mené par Lukasiewicz, tête de file de l'École polonaise de Logique des années 30 [Lukasiewicz, 1920, 1930]. Au même moment, le philosophe et logicien Bertrand Russell souligna le fait que la logique binaire, héritée d'Aristote, était mal adaptée à la formalisation du langage naturel puisque ce dernier contenait bon nombre de termes vagues, mal définis [Russel, 1923]. Toutefois, c'est au philosophe Max Black que l'on doit en 1937 l'idée novatrice de formaliser le sens des prédicats vagues, utilisés dans le langage

¹ Une logique multivaluée ou multivalente admet plusieurs degrés de vérité entre le Vrai et le Faux.

courant, par des fonctions numériques d'appartenance [Black, 1937]. Il ne restait plus à Lotfi Zadeh qu'à oser faire la jonction entre toutes ces prémisses pour aboutir à la définition formelle de la logique floue, logique nuancée qu'il voulait être proche d'une logique humaine.

Introduit par [Zadeh, 1965], le concept d'**ensemble flou** permet la représentation de classes vagues aux frontières mal définies telles que « *personne âgée* », « *température élevée* », « *virage serré* », « *solution concentrée* »... Partant d'un référentiel généralement numérique, tel que celui décrivant un âge mesuré en années, une température mesurée en degrés, un rayon de courbure mesuré en mètres, une concentration mesurée en moles par litre, Zadeh propose de définir les concepts linguistiques par une application fonctionnelle faisant correspondre à tout élément du référentiel son degré d'appartenance au concept considéré.

BINARITÉ = DISCONTINUITÉ AUX FRONTIÈRES

Avec le concept classique d'ensemble², il n'existe que deux états possibles d'appartenance : soit un élément x appartient à un ensemble A ; soit il n'appartient pas à cet ensemble. De façon équivalente, cette binarité des états est aussi présente en logique aristotélicienne : une proposition peut être soit vraie, soit fausse ; si elle est vraie, c'est que nécessairement sa négation est fausse et *vice versa*. Si cette binarité est nécessaire dans le cadre formel des démonstrations mathématiques, elle devient vite contraignante dans la résolution de problèmes de la vie réelle.

Rappelons qu'un ensemble net A peut être défini par une fonction caractéristique μ_A , qui associe le nombre 1 à tout élément appartenant à A et affecte le nombre 0 à tout élément n'appartenant pas à A . Par exemple, pour une compagnie aérienne, l'ensemble des jeunes voyageurs sera constitué de tous les voyageurs ayant un âge inférieur ou égal à 25 ans (cf. Figure 1).

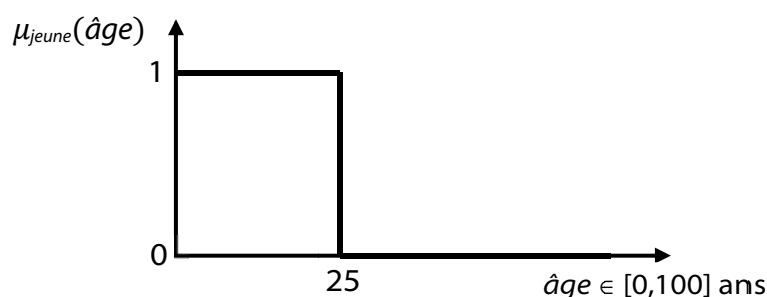


Figure 1 – Définition nette de « jeune voyageur »

² Nous préconisons l'utilisation de l'adjectif « net » pour faire référence à l'approche classique binaire ; en opposition avec l'approche « floue », fondée sur la théorie du flou.

Inéluctablement, un effet de seuil apparaît : il suffit qu'un voyageur ait fêté son anniversaire la veille pour qu'il ne puisse plus bénéficier des tarifs préférentiels auxquels il aurait pu prétendre s'il avait pris l'avion un jour auparavant. En un jour, il est passé pour la compagnie aérienne de la catégorie des « voyageurs jeunes » à celle des « voyageurs non-jeunes ». Cette transition discontinue est spécifique aux ensembles nets et à la logique aristotélicienne du fait qu'il n'existe pas de niveau intermédiaire entre le 0 et le 1, entre l'appartenance et la non-appartenance, entre le Vrai et le Faux, entre le Noir et le Blanc. Pourtant, dans la vie de tous les jours, nous ressentons intuitivement que le passage de la « jeunesse » s'impose de façon moins drastique et beaucoup plus graduelle.

FLOU = GRADATION AUX LIMITES

Ainsi, est introduite la notion fondamentale d'appartenance graduée (le degré d'appartenance peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1) autorisant certains éléments à appartenir plus ou moins à un ensemble donné ; cet ensemble est alors qualifié de « flou ». Par exemple, pour la Police des Ais et des Frontières la catégorie de « voyageur jeune » sera plutôt définie par l'ensemble flou représenté par la Figure 2.

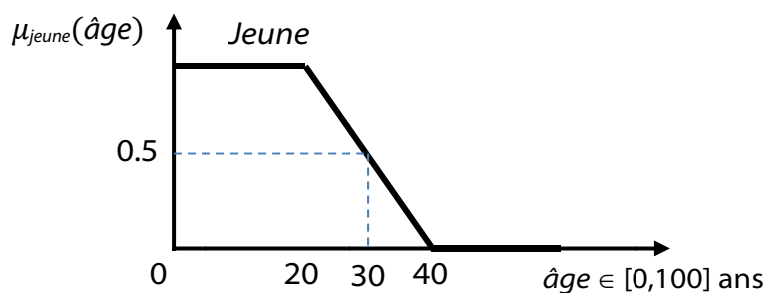


Figure 2 – Définition floue d'un « voyageur jeune »

Avec cette modélisation, les personnes de moins de 20 ans seront considérées comme tout à fait jeunes (degré=1) : elles définissent les prototypes de cette classe floue ; un voyageur ayant 30 ans comme plus ou moins jeune (degré=0.5). Par contre, la personne n'appartient plus à la catégorie jeune dès que son âge dépasse 40 ans (degré=0). D'autres catégories vagues telles que « voyageur ayant la quarantaine » ou « voyageur senior » peuvent aussi être spécifiées pour permettre une qualification de n'importe quel voyageur qui viendrait à passer les frontières (cf. Figure 3). Un ensemble flou permet de ce fait de créer une interface naturelle entre le quantitatif/numérique et le qualitatif/symbolique.

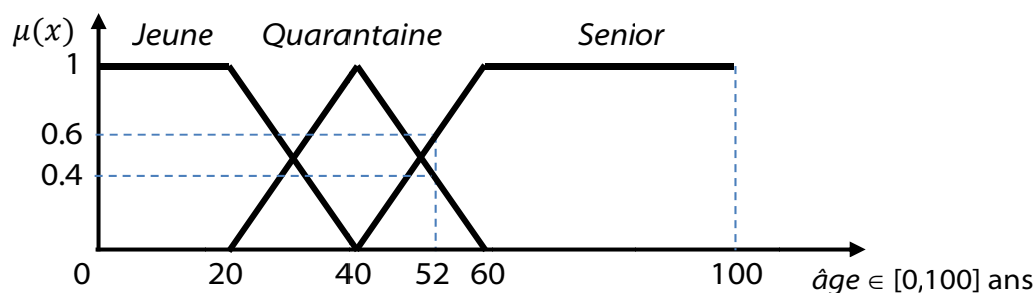


Figure 3 – Partition floue avec trois classes : « jeune », « quarantaine », « senior »

Grâce au chevauchement des ensembles flous, un voyageur ayant 52 ans sera considéré à la fois comme plutôt senior (degré=0.6) et s'éloignant quelque peu de la quarantaine (degré=0.4). Ce chevauchement des classes est à la base de la robustesse des systèmes flous : il autorise un changement progressif d'état et par conséquent une convergence progressive de la décision. Ainsi, le concept d'ensemble flou, permettant une appartenance nuancée, autorise la définition de catégories linguistiques graduelles telles qu'elles sont manipulées par l'esprit humain.

Ce saut conceptuel, qui paraît de prime abord anodin, bouleverse certains principes fondateurs des mathématiques classiques. Tout d'abord, il existe en théorie du flou une infinité, et non plus une définition unique, d'opérateurs modélisant le ET (conjonction/intersection), le OU (disjonction/union), le NON (négation/complémentation) et le SI..ALORS (implication/déduction). De plus, des lois aussi célèbres que celle du tiers-exclu³ et celle de non-contradiction⁴ ne sont généralement plus respectées.

A partir de variables floues qualifiées par les classes de partitions floues, il est possible de construire des **règles floues** de décision :

SI (le voyageur est *Jeune* OU *a la Quarantaine*) ET que (le voyageur revient d'une destination *Exotique*) ET que (le séjour a été *Bref*) ALORS Procéder à une fouille *approfondie* du voyageur et de ses bagages par le Maître-chien.

Un **système flou** sera composé d'une compilation de règles floues. Grâce au moteur d'inférence implantant les schémas de raisonnement approché (*Modus Ponens Généralisé*), il est possible de déclencher les règles floues idoines afin de calculer la décision finale du système flou [Zadeh, 1975] [Zalila, 1993].

³ Loi du Tiers-Exclu : Ou une proposition est vraie ou sa négation est vraie

⁴ Loi de Non-Contradiction : Une proposition et sa négation ne peuvent être vraies en même temps

2. MODÉLISATION FLOUE

L'objectif de la modélisation est d'obtenir un modèle formel permettant de décrire un processus naturel, humain ou industriel en vue de sa compréhension (e.g. le processus de sédimentation au fond des océans ou la stratégie d'évaluation d'un produit par un segment de consommateurs), et/ou en vue de la prédiction des effets de ce processus (e.g. l'acceptabilité d'un nouveau produit par ce segment de consommateurs).

Fondée sur le concept de règle floue⁵, l'approche floue propose une modélisation plus intuitive que les approches classiques de modélisation, qu'elles soient probabilistes ou analytiques, basées sur des systèmes d'équations différentielles ou de dérivées partielles. En tant que brique élémentaire, une règle floue permet de modéliser une connaissance experte, en reliant de façon non-linéaire des entrées floues avec des sorties nettes ou floues. Héritée de l'approche symbolique de l'Intelligence Artificielle, la méthode classique de modélisation par système flou consiste à faire expliciter linguistiquement par l'expert son processus de décision afin d'obtenir les règles floues nécessaires [Zadeh, 1968, 1973] [Mamdani, 1974] [Mamdani & Assilian, 1975]. Cependant, dans de nombreux cas (raisonnement tacite d'expert, processus difficilement modélisables par des méthodes classiques, grande complexité du processus de décision), il est *a priori* impossible d'interpréter la prise de décision sous la forme de règles linguistiques [Gigerenzer & Todd, 1999]. L'approche **xtractis**[®] propose dans ces cas d'extraire automatiquement, par apprentissage, les règles de décision représentant le processus à modéliser. Cet apprentissage s'effectue à l'aide d'une base de données d'exemples comportant diverses prises de décision en fonction de différentes situations. **xtractis**[®] s'inscrit ainsi dans la branche du *Data Mining* (fouille de données) dénommée *Knowledge Discovery from Data* (Découverte de connaissances à partir de données) ou *Data-Driven Modelling* (modélisation dirigée par les données).

Comme tout système flou se révèle être un approximeur universel de fonctions non-linéaires reliant les variables de sortie aux variables observées [Kosko, 1992] [Wang & Mendel, 1992], il permet théoriquement de modéliser n'importe quel processus ou système dynamique complexe, faisant intervenir un grand nombre de variables en forte interaction (phénomènes naturels, processus physico-chimiques, comportement d'un opérateur humain...).

Tout modèle flou bénéficie des quatre propriétés importantes des systèmes flous [Zalila, 1993-2008] :

⁵ Correspondant au modèle « Si *Prémisse*... Alors *Conclusion* » dérivé de la psychologie cognitive.

INTELLIGIBILITÉ

La définition d'un modèle descriptif et qualitatif d'un processus, par exemple le comportement d'un agent décideur, devient relativement aisée puisqu'elle est principalement basée sur l'emploi de règles linguistiques décrivant l'expertise, les stratégies heuristiques, le savoir-faire de cet opérateur. En effet, s'agissant d'identifier les règles de décision/action et leurs conditions de mise en œuvre dans les différentes sous-tâches de prise de décision étudiées, les règles floues s'avèrent commodes pour associer les actions opérées par l'agent décideur aux conditions décrivant, même de façon partielle et vague, les situations rencontrées lors de la prise de décision.

Cette simplification de l'architecture du modèle entraîne une plus grande simplicité de programmation, une plus grande flexibilité et de plus faibles coûts de maintenance. En outre, par sa lisibilité et sa similarité avec le langage naturel, ce formalisme à base de règles facilite le dialogue entre ingénieurs, ergonomes et psychologues cognitivistes, dans le cadre d'une conception pluridisciplinaire d'un système technologique en forte interaction avec un opérateur [Bourlier & Sperandio, 1995] : l'ingénieur n'a plus besoin d'expliquer qualitativement ce que modélise quantitativement une équation différentielle ou aux dérivées partielles.

LOCALITÉ

Chaque règle modélise le comportement de l'agent décideur face à une situation donnée, qui peut être décrite de manière imprécise, incertaine ou subjective. La modification du comportement de l'agent pour une situation donnée s'obtient alors par modification des règles locales spécialisées dans la description de cet état du monde. Définir des règles floues revient à définir des cellules multidimensionnelles qui couvrent l'espace de décision⁶ (cf. Figure 4). Du fait que les règles sont floues, les cellules correspondantes se chevauchent aux frontières.

De par ce maillage cellulaire flou de l'espace de décision, une modification locale n'engendre pas de changement global dans le comportement de l'agent. Cette propriété de localité, permet notamment au concepteur de « réparer » localement un système flou qui ne fonctionnerait pas de manière correcte pour certaines situations.

⁶ 1 cellule floue = 1 règle floue

TRAÇABILITÉ

Le concepteur a la possibilité de tracer le chemin utilisé par le système flou pour atteindre la décision finale en partant des entrées : il suffit pour cela de lister les règles floues qui ont été déclenchées, avec leurs degrés d'activation. De ce fait, la validation du modèle flou s'en trouve facilitée.

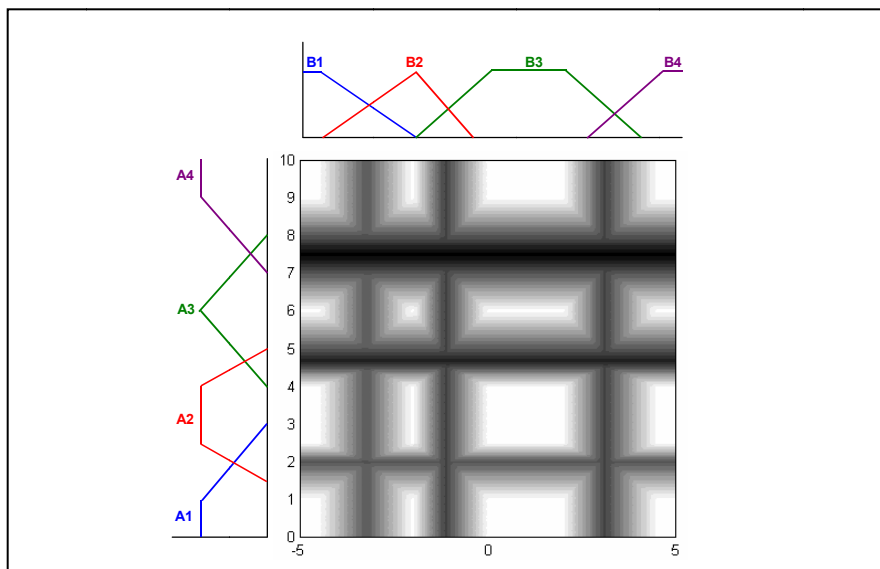


Figure 4 – Exemple de maillage flou à 16 cellules

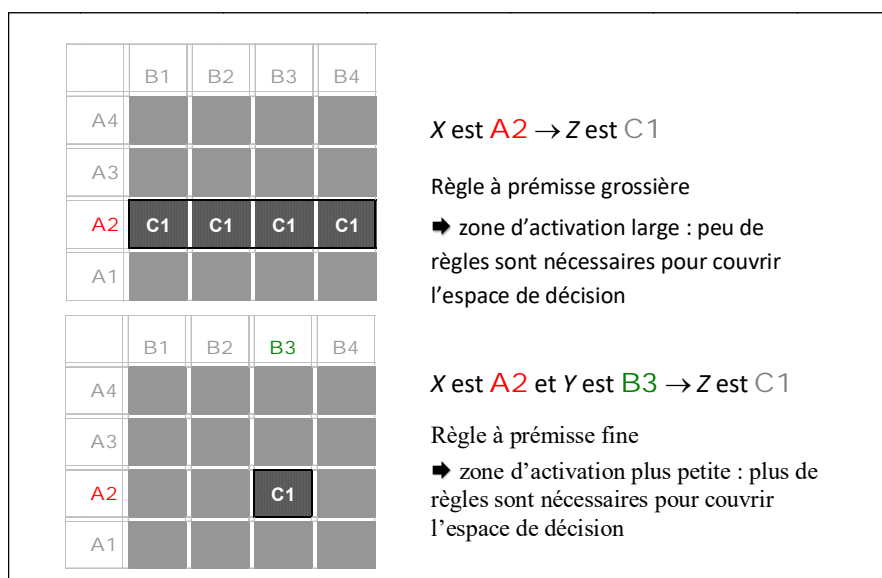


Figure 5 – Granularité des règles floues

GRANULARITÉ

Le concepteur a la liberté de choisir la taille du grain de connaissance qu'il manipule. Sélectionner la taille du grain manipulé revient à fixer, dans le maillage de l'espace de décision, la taille de la maille correspondant à la règle floue [Zadeh, 1996]. Deux démarches sont possibles :

- Le concepteur peut diminuer (resp. augmenter) la taille de la maille en augmentant (resp. diminuant) le nombre d'entrées présentes dans la partie prémisses de la règle : il est ainsi capable de modéliser de manière plus détaillée tous les éléments sur lesquels reposent des différences de prise de décision de l'agent (cf. Figure 5).
- Une autre façon d'affiner localement une règle, dont le comportement serait jugé grossier, consiste à la remplacer par un groupe de règles plus spécialisées, en procédant à un remaillage de la maille. Ceci s'opère en remplaçant au moins une des classes floues qualifiant une des entrées de la règle, par deux ou plusieurs classes plus spécifiques (cf. Figure 6).

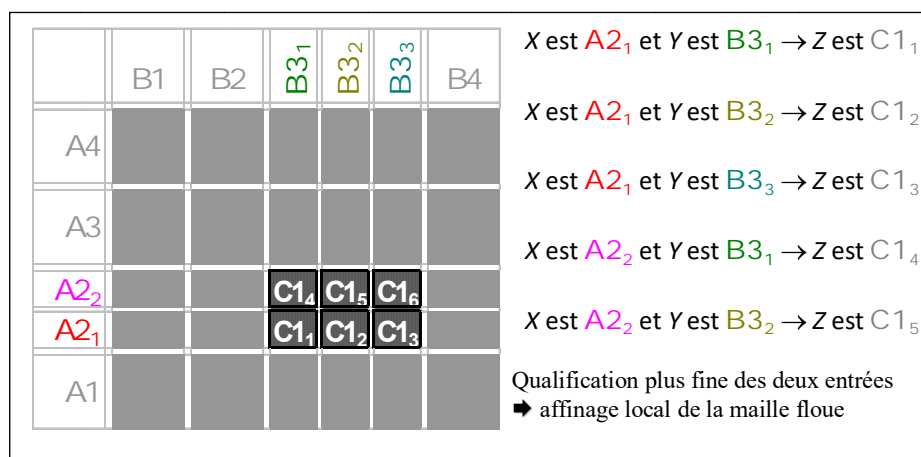


Figure 6 – Granularité de la modélisation floue

Ce maillage peut être réitéré de manière fractale, par zooms successifs ; c'est en particulier grâce à cette propriété que le modélisateur peut approcher aussi finement qu'il le souhaite n'importe quelle fonction non-linéaire. De manière duale, la propriété de granularité explique la frugalité d'un système flou qui peut se contenter d'une description sommaire, voire partielle, de la situation de prise de décision, sans pour autant dégrader la modélisation du processus.

À la différence de l'approche connexionniste (i.e. réseaux de neurones formels) qui construit des modèles de type boîte noire [Hassoun, 1995] [Patterson, 1996], l'induction automatique de modèles flous permet de maintenir les propriétés d'intelligibilité, de traçabilité, de localité et de granularité qui font la force des systèmes flous, tout en offrant une grande souplesse dans la définition de modèles non-linéaires, même en l'absence de connaissance *a priori*.

3. IDÉES CLE SUR LA THÉORIE DU FLOU [ZALILA, 2003]

- Le Flou fédère trois facettes souvent coexistantes : Imprécision, Incertitude, Subjectivité.
- Dans la vie réelle, nous prenons régulièrement de bonnes décisions à partir d'informations floues. La théorie du flou est un cadre formel qui permet la modélisation et le traitement rigoureux de ce type d'information.
- La connaissance floue est riche en information : la transformer dès le début du traitement en une connaissance nette induit un biais qui se répercute inmanquablement sur la qualité de la décision. Il est au contraire préférable de maintenir le flou tout au long du traitement et de ne trancher qu'en fin de processus (passage de la décision floue vers la décision nette).
- La logique floue et la théorie des ensembles flous servent à la modélisation graduelle et nuancée de la connaissance experte, en proposant un mode de raisonnement approché et analogique, tout en permettant la définition de catégories aux bornes mal définies. En appréhendant à la fois l'imprécision et l'incertitude, elle autorise la conception de systèmes d'aide à la décision plus efficaces que les systèmes experts classiques : un expert sera d'autant plus certain de ses affirmations qu'on l'autorise à être imprécis et sera d'autant plus incertain qu'on l'oblige à être précis. Elle offre aussi une approche alternative performante pour la modélisation de processus et de phénomènes complexes non-linéaires.
- L'arithmétique floue permet une modélisation et un traitement des quantités numériques imprécises. Elle autorise la conception de modèles analytiques prévisionnels plus justes, c'est-à-dire plus fidèles à la réalité.
- Les mesures duales de possibilité et de nécessité remplacent la mesure de probabilité lorsque le décideur doit évaluer l'occurrence d'un événement, sur lequel il possède peu de données historiques ou des données de mauvaise qualité. Ceci apparaît notamment dans les problèmes de décision multicritère ou de sûreté de fonctionnement, lorsque le décideur fait appel à des informations provenant de capteurs humains (jugement, avis d'expert). La théorie des possibilités est ainsi adaptée à la prise en compte de l'incertitude épistémique liée au manque d'information, lorsque la théorie des probabilités s'intéresse plutôt à l'incertitude stochastique caractérisant une présence d'aléa. Elle autorise notamment l'estimation de l'occurrence d'événements imprécis.

De cette manière, la théorie du flou étend la palette des méthodes de modélisation, de prédiction et d'évaluation, tout en simplifiant la formalisation de problèmes complexes.

4. RÉFÉRENCES

- Black, M.(1937) Vagueness, an exercise in logical analysis. *Philosophy of science*, 4, 427-455.
- Bourlier, F., Sperandio, J.-C. (1995), Analyse et formalisation de la conduite automobile par des règles de production. Intérêt, limites et difficultés. *Psychologie Française*, n°40-1, 61-72.
- Gigerenzer, G., Todd, P.M., the ABC Research Group (1999) *Simple Heuristics that make us smart*. New York: Oxford University Press.
- Hassoun, M.H. (1995) *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. Cambridge: MIT Press.
- Kosko, B. (1992) Fuzzy systems as universal approximators. *Proceedings of the 1st IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE FUZZ92* (pp. 1153-1162), San Diego.
- Lukasiewicz, J. (1967) On 3-valued logic. In S. McCall, *Polish logic 1920-1939*, Oxford University Press.
- Lukasiewicz, J. (1967) Many-valued systems of propositional logic. In S. McCall, *Polish logic 1920-1939*, Oxford University Press.
- Mamdani, E. H. (1974) Application of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant. *Proceedings of IEEE* (pp. 1585-1588), 121-12.
- Mamdani, E.H., Assilian, S. (1975) An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *Int. J. Man-Machine Studies*, 7, 1-13.
- Patterson, D.W. (1996) *Artificial Neural Networks. Theory and Applications*. Singapore: Prentice Hall.
- Russel, B. (1923) Vagueness. *Australian J. of Philosophy*, 1.
- Wang, L. X., Mendel, J. M. (1992) Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least square learning. *IEEE Trans. Neural Networks*, 3, 807-814.
- Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.
- Zadeh, L.A. (1968) Fuzzy algorithms. *Information and Control*, 12, 94-102.
- Zadeh, L.A. (1973), Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 3, 28-44.
- Zadeh, L.A. (1975), The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Science*, Part I : 8, 199-249, Part II : 8, 301-357, Part III : 9, 43-80.
- Zadeh, L.A. (1996), *The Key Roles of Fuzzy Information Granulation in Human Reasoning, Fuzzy Logic and Computing with Words*. Internal Report, Computer Science Division and the Electronics Research Laboratory, Department of EECS, University of California, Berkeley, California, USA, October 15 1996.
- Zalila, Z. (1993) *Contribution à une théorie des relations floues d'ordre n*. PhD thesis, D 573, Université de Technologie de Compiègne, France, 474 p.
- Zalila, Z. (1993-2009) *Logique floue : concepts et applications*, SY10 Lecture notes, Université de Technologie de Compiègne, France, 198 p.
- Z. Zalila (2003), Évaluation subjective : les mathématiques du flou, une voie vers les testeurs numériques ? *Actes 5e Rencontres du Marketing Sensoriel*, Comment donner du sens à son produit : méthodes et outils d'évaluation de la qualité perçue, EUROSYN Human Engineering, Paris, 14 janvier 2003, 43-62.